Lösningar till diagnosprov i Matte 3

Kap 2 Derivata

Regler:

- Svar utan mellanräkningar ger inga poäng.*
- Mellanräkningarna ska vara läsliga, förståeliga och strukturerade.
- Det är tillåtet att använda kalkylator.
- Provtiden är 90 minuter.

* Gäller endast de frågor som behöver mellanräkning.

Uppgift nr 1 **Svar: $y' = -6x + 9$**

Derivera funktionen $y = -3x^2 + 9x + 8$

****

Uppgift nr 2 **Svar: - 15**

Vad blir $y'(-3)$ om $$y = \frac{2x^4}{9} + \frac{x^3}{3}$$

Lösning:

$$y = \frac{2x^4}{9} + \frac{x^3}{3}$$

$$y' = \frac{8x^3}{9} + x^2$$

$$y'(-3) = \frac{8\cdot(-3)^3}{9} + (-3)^2 = 8\cdot(-3) + 9 =$$

$$= -24 + 9 = \underline{\underline{-15}}$$

****

Uppgift nr 3 **Svar:** $f'(x) = 2 - \frac{1}{x^2}$

Ställ upp derivatan $f'(x)$ om $$f(x) = 2x + \frac{1}{x}$$

Lösning:

$$y = 2x + \frac{1}{x} = 2x + x^{-1}$$

$$y' = 2 + (-1)\cdot x^{-1-1} = 2 - x^{-2} =$$

$$= \underline{\underline{2 - \frac{1}{x^2}}}$$

****

Uppgift nr 4 **Svar:** $f'(x) = \frac{5}{12} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Derivera funktionen $$y = \frac{5x}{12} + \sqrt{x}$$

Lösning:

$$y = \frac{5x}{12} + \sqrt{x} = \frac{5x}{12} + x^{1/2}$$

$$y' = \frac{5}{12} + \frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{5}{12} + \frac{1}{2}\cdot x^{-1/2} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{5}{12} + \frac{1}{2\sqrt{x}}}}$$

****

Uppgift nr 5 **Svar: 13,811**

Vad blir **f '(1)** om $f(x) = 5e^{x} - 3e^{-4x}$

Avrunda svaret till tre decimaler.

Lösning:

$$f(x) = 5e^{x} - 3e^{-4x}$$

$$f'(x) = 5e^{x} + 12e^{-4x}$$

$$f'(1) = 5 \cdot e^{1} + 12 \cdot e^{-4} = \underline{\underline{13,811}}$$

****

Uppgift nr 6 **Svar: x = 1,256**

För vilket x antar derivatan av följande funktion värdet 17 ? $y = 6^{x}$

Ange svaret avrundat till tre decimaler.

Lösning:

$$y = 6^{x}$$

$$y' = 6^{x} \cdot \ln 6 = 17$$

$$6^{x} = \frac{17}{\ln 6} \qquad | \lg(\cdot)$$

$$\lg 6^{x} = \lg\left(\frac{17}{\ln 6}\right)$$

$$x \cdot \lg 6 = \text{—} \,\text{"}\, \text{—}$$

$$x = \frac{\lg\left(\frac{17}{\ln 6}\right)}{\lg 6} = \underline{\underline{1,256}}$$

****

Uppgift nr 7 **Svar:** $y' = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$

Ställ upp derivatan av följande funktion: $y = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$

Lösning:

$$y = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \frac{e^{x}}{2} + \frac{e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \cdot e^{x} + \frac{1}{2} \cdot e^{-x}$$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot e^{x} - \frac{1}{2} \cdot e^{-x} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

****

Uppgift nr 8 **Svar: $y = 3x - 2$**

Ställ upp ekvationen för tangenten till kurvan

$$y = x^2 + 5x - 1$$

i punkten x = -1 .

Lösning:

Kurvan: $y = x^2 + 5x - 1$

$$y(-1) = (-1)^2 + 5\cdot(-1) - 1 =$$
$$= 1 - 5 - 1 = -5$$

$$y' = 2x + 5$$

$$y'(-1) = 2\cdot(-1) + 5 = 3$$

Tangenten: $y = k\cdot x + m$

$$y = 3x + m \Leftarrow k = 3$$

$$-5 = 3\cdot(-1) + m$$

$$-5 + 3 = m$$

$$m = -2$$

$$\underline{\underline{y = 3x - 2}}$$

****

Uppgift nr 9 **Svar: -1,69**

Temperaturen T i en kopp kaffe sjunker enligt modellen där t är tiden i minuter efter att kaffet hällts i koppen.

$$T = 70\cdot e^{-0{,}034t} + 35$$

Hur stor är avkylningshastigheten efter 10 minuter? Ange svaret med två decimalers noggrannhet.

Lösning:

$$T = 70\cdot e^{-0{,}034t} + 35$$

$$T' = (-0{,}034)\cdot 70\cdot e^{-0{,}034t}$$

$$T'(10) = -2{,}38\cdot e^{-0{,}34} =$$

$$= \underline{\underline{-1{,}69}}$$

****

Uppgift nr 10 Vad blir **f '(4)** om $f(x) = x^3 + \frac{\sqrt{x}}{2}$ **Svar: 48,125**

Ange resultatet med tre decimaler. Använd endast rotfunktionens positiva värde.

Lösning:

$$f(x) = x^3 + \frac{\sqrt{x}}{2} = x^3 + \frac{x^{1/2}}{2}$$

$$f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{1/2-1}}{2} =$$

$$= 3x^2 + \frac{x^{-1/2}}{4} = 3x^2 + \frac{1}{4\sqrt{x}}$$

$$f'(4) = 3 \cdot 4^2 + \frac{1}{4\sqrt{4}} = 48 + \frac{1}{8} =$$

$$= \underline{\underline{48,125}}$$

****

Uppgift nr 11 **Svar: Minskar med 457 personer/år**

Befolkningen i en småstad utvecklas under åren 2000 - 2010 enligt modellen:

$$N = 25\,000 \cdot 0{,}98^t$$

där N är antal personer och t är tiden i år räknat från 2000. Ökar eller minskar befolkningen år 2005 och i så fall hur mycket per år?

Lösning:

$$N = 25000 \cdot 0{,}98^t$$

$$N' = 25000 \cdot 0{,}98^t \cdot \ln 0{,}98$$

$$N'(5) = 25000 \cdot 0{,}98^5 \cdot \ln 0{,}98 = -456{,}54$$

Svar: Minskar med 457 personer/år.

****

Uppgift nr 12 **Svar: 16 218,60 kr/år**

Värdet av en produkt minskar enligt: $y = 225\,000 \cdot e^{-kx}$

där y är värdet i kr, x produktens ålder i år och k en konstant. Bestäm k så att värdet är 100 000 kr efter 5 år. Med hur många kr minskar värdet per år då x = 5?

Lösning:

$$y = 225000 \cdot e^{-k \cdot x}$$

$$100\,000 = 225000 \cdot e^{-5k}$$

$$\frac{100\,000}{225\,000} = e^{-5k}$$

$$\ln(\ \downarrow\ ) = -5k$$

$$-\frac{\ln(\ \downarrow\ )}{5} = k$$

$$0{,}162186 = k$$

$$y' = -k \cdot 225\,000 \cdot e^{-kx}$$

$$y'(5) = -k \cdot 100\,000 =$$

$$= -16\,218{,}6$$

Svar: Värdet minskar med 16 218,60 kr per år.

****

Uppgift nr 13 **Svar: 38 / min**

Antalet bakterier N i en bakteriekultur följer funktionen $N(t) = \dfrac{250}{1+249\cdot e^{-t}}$ där t är tiden i minuter. Ange bakteriernas tillväxthastighet efter 7 minuter.

Lösning:

Funktionen $N(t) = \dfrac{250}{1 + 249 \cdot e^{-t}}$

kan inte deriveras med någon av de deriveringsregler vi lärt oss i kap 2.

Därför: Numerisk derivering $N'(7) = ?$

Centrala differenskvoten:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{N(7+1) - N(7-1)}{8-6} = \frac{N(8) - N(6)}{2}$$

t	8	6
$N(t)$	230,73	154,59

$$N'(7) \approx \frac{N(8) - N(6)}{2} = 38,07$$

Svar:

38 bakterier per minut.

****

Uppgift nr 14 **Svar: 7,2 timmar**

Bakterier i en liter mjölk växer enligt modellen $y = 10\cdot 2^x$
där y är antal bakterier och x är tiden i timmar. Efter hur många timmar har tillväxthastigheten i mjölken uppnått 1000 bakterier/timme? Avrunda svaret till en decimal.

Lösning:

$$y = 10 \cdot 2^x$$

$$y' = 10 \cdot 2^x \cdot \ln 2$$

$$1000 = 10 \cdot 2^x \cdot \ln 2$$

$$\frac{100}{\ln 2} = 2^x$$

$$\frac{100}{\ln 2} = \left(10^{\lg 2}\right)^x$$

$$\frac{100}{\ln 2} = 10^{x \cdot \lg 2} \quad | \lg(\cdot)$$

$$\lg\left(\frac{100}{\ln 2}\right) = x \cdot \lg 2$$

$$\frac{\lg 100 - \lg(\ln 2)}{\lg 2} = x$$

$$\frac{2 - \lg(\ln 2)}{\lg 2} = x$$

$$7{,}17 = x$$

Svar:

7,2 timmar

****

Uppgift nr 15 **Svar: y = x – 6 och (1, -5)**

Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan

$$y = 2x^2 - 3x - 4$$

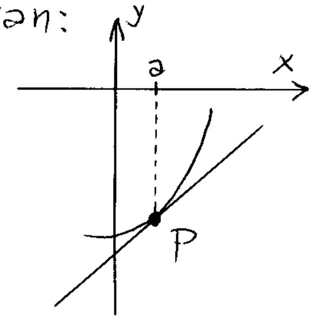
som är parallell till linjen

$$y = x - 4$$

I vilken punkt tangerar tangenten kurvan? Ange denna punkts koordinater.

Lösning:

Låt a vara x-koordinaten till den punkt P där tangenten tangerar kurvan:



Kurvan: $y = 2x^2 - 3x - 4$

$y' = 4x - 3$

$y'(a) = 4a - 3$

Tangent parallell till linjen $y = x - 4$

$\Downarrow$

$y'(a) = 4a - 3 = 1$

$4a = 4$

$a = 1$

Svar: P(1, -5)

$y(a) = y(1) = 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 - 4 = 2 - 3 - 4 = -5$

Tangenten: $y = k \cdot x + m$

parallell till $y = x - 4$ $\Rightarrow y = x + m$

P på tangenten $\Rightarrow -5 = 1 + m$

$6 = m \Rightarrow$

Svar: $y = x - 6$