

## Lösning:

### Introduktion till derivata

#### Fråga a)

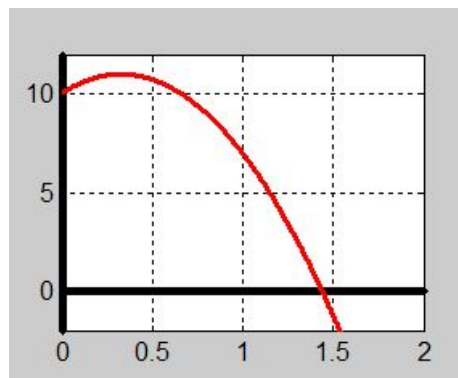
1) Värdetabellen till funktionen  $y = f(x) = -9x^2 + 6x + 10$  är given:

<b>x</b>	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6
<b>y</b>	10	10,84	10,96	10,36	9,04	7	4,24	0,76	-3,44

2) I grafen till funktionen ovan läser vi av kurvans skärningspunkt med **x**-axeln och hittar den grafiska lösningen till ekvationen  $y = -9x^2 + 6x + 10 = 0$

Svar: 1,45

Yulia slår i vattnet efter **1,45 sek.**



#### Fråga b)

3) Vi bildar för varje 

<b>x</b> =	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4
------------	---	-----	-----	-----	-----	---	-----	-----

 följande uttryck:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{eller} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Uttrycket kallas:

**Genomsnittlig förändringshastighet**

Välj **h = 0,2**

T.ex. för  $x = 0$  kan vi beräkna  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  med hjälp av uttrycket ovan så här:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(0+0,2) - f(0)}{0,2} = \frac{f(0,2) - f(0)}{0,2} = \frac{10,84 - 10}{0,2} = \frac{0,84}{0,2} = 4,2$$

Dvs: Mellan  $x = 0$  och  $x = 0,2$  är Yulias genomsnittliga hastighet 4,2 m/sek.

Generellt:  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  är den genomsnittliga hastigheten i tidsintervallet mellan  $x$  och  $x + h$ .

4) Vi beräknar  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  för alla andra  $x$ -värden på samma sätt som ovan med hjälp av uttrycket i punkt 3. Resultaten infogas i följande **ny värdetabell** för  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ :

<b>x</b>	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	4,2	<b>0,6</b>	<b>-3</b>	<b>-6,6</b>	<b>-10,2</b>	<b>-13,8</b>	<b>-17,4</b>	<b>-21</b>

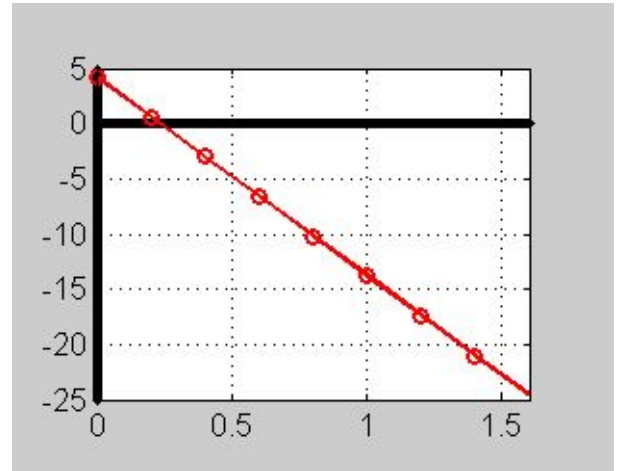
5) Vi ritar  $x$  som horisontell och  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  som vertikal axel med följande min/max-värden:

$$x_{\min} = 0 \quad x_{\max} = 1,6 \quad \text{på } x\text{-axeln}$$

och  $\frac{\Delta y}{\Delta x_{\min}} = -25 \quad \frac{\Delta y}{\Delta x_{\max}} = 5 \quad \text{på } \frac{\Delta y}{\Delta x}\text{-axeln}$

- 6) Vi prickar in  $x$ - och  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ -värdena från den nya värdetabellen som punkter i koordinatsystemet. Vilken typ av graf får vi?

Svar: Rät linje



- 7) Vi läser av från denna graf, vilket värde  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  har vid den tidpunkt då Yulia slår i vattnet. Denna tidpunkt kan hämtas från punkt 2 som är **1,45 sek**.

Vilket värde har  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  vid tidpunkten **1,45 sek**?

Svar: - 22

Yulia slår i vattnet med en (genomsnittlig) hastighet på **22 m/sek**.

### Fysikalisk tolkning:

## Derivata = Hastighet

Svaret i punkt 7 är Yulias **genomsnittliga hastighet** i tidsintervallet kring den tidpunkt då Yulia slår i vattnet. Samtidigt är detta ett närmevärde till den exakta, momentana (ögonblickliga) hastigheten med vilken Yulia slår i vattnet.

Detta närmevärde kan förbättras genom att välja en mindre **steglängd  $h$** .

Yulias **exakta, momentana (ögonblickliga) hastighet** fås när  $h \rightarrow 0$  och kallas **derivata**.

### Geometrisk tolkning:

## Derivata = Lutning

- 8) Vi väljer tidpunkten  $x = 1$ . Vilket värde har  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  här?

Svar: - 13,8

Svaret läses av från den nya värdetabellen i punkt 4.

- 9) Nu ska vi ställa upp ekvationen till den räta linje som går genom punkten **(1, 7)** och har lutningen **- 13,8**. Punkten **(1, 7)** är Yulias position vid tidpunkten  $x = 1$  och fås från den första värdetabellen i punkt 1:  $f(1) = 7$ . Dvs Yulia har efter **1 sek** höjden **7 m** och (genomsnittliga) hastigheten **- 13,8 m/sek**.

Detta är en standarduppgift i Matte 2: Råta linjens ekvation med en given lutning och en given punkt:

$$y = k \cdot x + m$$

$$y = -13,8 \cdot x + m$$

Linjen ska gå genom punkten (1, 7). Därför sätter vi in 1 för x och 7 för y i ekvationen ovan:

$$7 = -13,8 \cdot 1 + m$$

$$7 = -13,8 + m$$

$$7 + 13,8 = m$$

$$m = 20,8$$

Därför:

$$y = -13,8 \cdot x + 20,8$$

10) Med grafräknaren ritat vi följande grafer i ett och samma koordinatsystem:

- Grafen till den funktion som beskriver Yulias bana:  $y = -9x^2 + 6x + 10$
- Grafen till den råta linje vi fick i punkt 9.

Vad observerar vi?

Resultatets tolkning:

- Linjen blir tangenten till kurvan i punkten (1,7). (Tangent är en rät linje som "berör" en kurva i en punkt.)
- Tangentens lutning -13,8 kan anses som kurvans lutning i punkten (1,7).
- -13,8 m/sek är – fysikaliskt tolkat – Yulias genomsnittliga hastighet i tidsintervallet mellan  $x = 1$  och  $x = 1,2$ .
- -13,8 är – matematiskt tolkat – ett närmevärde till derivatan av funktionen  $y = -9x^2 + 6x + 10$  i punkten  $x = 1$ .
- -13,8 är – geometriskt tolkat – ett närmevärde till lutningen av kurvan  $y = -9x^2 + 6x + 10$  i punkten (1,7), dvs lutningen av tangenten till kurvan i denna punkt.

