Lösningar till diagnosprov 2 Matte 3
Kap 1 Algebra + funktioner

1) a) $\underline{\underline{(x+1)\cdot(x-8)}}$

b) $(x+1)\cdot(x-8) = x^2-8x+x-8 =$

$= \underline{\underline{x^2-7x-8}}$

c) Ja, det finns oändligt många. Alla polynom av formen $c\cdot(x+1)\cdot(x-8)$, där $c = \text{const.}$ har nollställena -1 och 8, t. ex.:

$$\underline{\underline{5\cdot(x+1)\cdot(x-8)}}$$

därför att: $5\cdot(x+1)\cdot(x-8) = 0 \quad |/5$

$(x+1)\cdot(x-8) = 0$:Nollproduktmetoden

$x_1 = -1$

$x_2 = 8$

2)

a) $6x^3-3x^2(2x-4)-3x(3x+5) =$

$= 6x^3-6x^3+12x^2-9x^2-15x =$

$= \underline{\underline{3x^2-15x = P(x)}}$ $\left\{\begin{array}{l}\text{Grad}=2\\ \text{Koefficienter:}\\ 3 \text{ och } -15\end{array}\right.$

b) $P(-2) = 3\cdot(-2)^2-15\cdot(-2) =$

$= 3\cdot 4 + 30 = 12+30 = \underline{\underline{42}}$

c) $3x^2-15x = 0$: Bryt ut $3x$ i VL

$3x\cdot(x-5) = 0$: Nollproduktmetoden

$3x = 0 \quad |/3$

Ett nollställe: $\underline{\underline{x_1 = 0}}$

2) c) (forts.)

$$3x^2 - 15x = 0$$

$$3x \cdot (x-5) = 0$$

Redan faktoriserad

$$x - 5 = 0$$

Det 2:a nollstället: $\underline{\underline{x_2 = 5}}$

d) $P(x) = \underline{\underline{3x \cdot (x-5)}}$

Kontroll: $3x \cdot (x-5) = 3x^2 - 15x$: OK, se a)

3) $$\frac{7x}{12} + \frac{2x}{3} - \frac{3x}{4} = \frac{7x}{12} + \frac{4 \cdot 2x}{4 \cdot 3} - \frac{3 \cdot 3x}{3 \cdot 4} =$$

$$= \frac{7x}{12} + \frac{8x}{12} - \frac{9x}{12} = \frac{7x + 8x - 9x}{12} = \frac{6x}{12} = \underline{\underline{\frac{x}{2}}}$$

---

4) $$\frac{a-b}{b-a} = \frac{-b+a}{b-a} = \frac{-(b-a)}{b-a} = \frac{(-1) \cdot (b-a)}{b-a} = \underline{\underline{-1}}$$

5) $$\frac{6(x^2 - 4x + 4)}{2x - 4} = \frac{6 \cdot (x-2)^2}{2 \cdot (x-2)} = \frac{6 \cdot (x-2)}{2} = \underline{\underline{3 \cdot (x-2)}}$$

6) $$\ln\left(e^{(x+1)}\right) = -5x + 9$$

Invers-egenskapen:

Tar ut varandra

$$x + 1 = -5x + 9 \quad | +5x$$

$$6x + 1 = 9 \quad | -1$$

$$6x = 8 \quad | /6$$

$$x = \frac{8}{6}$$

$$\underline{\underline{x = \frac{4}{3}}}$$

7)
$$e^{(2x+3)} = 19 \qquad | \ln(\cdot)$$

Inversegensk.:
$$\ln\left(e^{(2x+3)}\right) = \ln 19$$

$$2x+3 = \ln 19 \qquad | -3$$

$$2x = \ln 19 - 3 \qquad | /2$$

$$x = \frac{\ln 19 - 3}{2}$$

$$\underline{\underline{x = -0{,}0278}}$$

8)
$$5 \cdot \ln\left(\frac{3}{4}x\right) = 2{,}5 \qquad | /5$$

$$\ln\left(\frac{3}{4}x\right) = \frac{1}{2} \qquad | e^{\cdot}$$

Invers-egensk.:
$$e^{\ln(3/4\, x)} = e^{1/2}$$

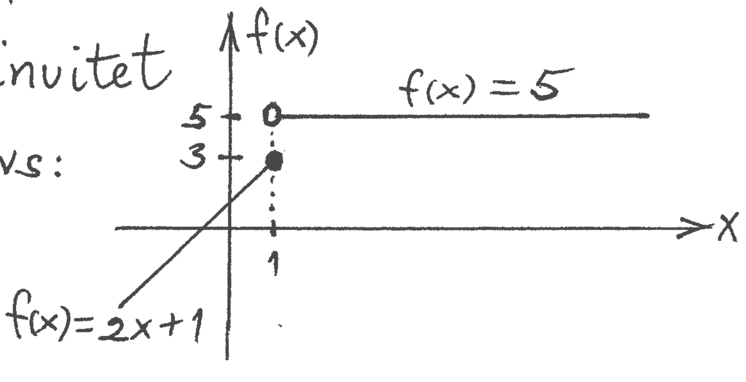
$$\frac{3}{4}x = e^{1/2} \qquad | \cdot \frac{4}{3}$$

$$x = \frac{4 \cdot e^{1/2}}{3} = \underline{\underline{2{,}20}}$$

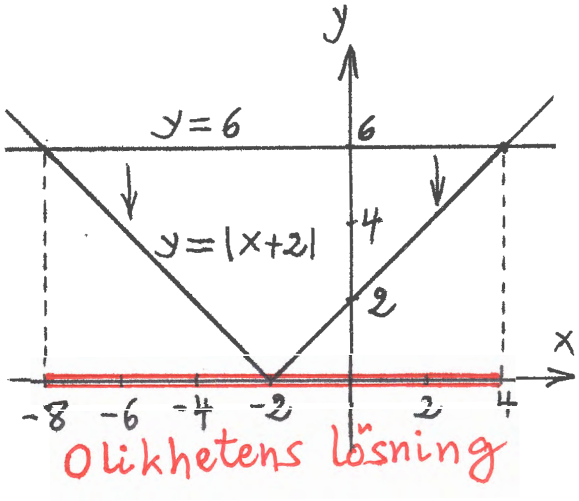
9)
$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{om } x \leq 1 \implies f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \\ 5 & \text{om } x > 1 \implies \text{För } x \to 1 \text{ går } f(x) \to 5 \end{cases}$$

f(x) <u>inte</u> kontinuerlig för $x = 1$. $\Longleftarrow 3 \neq 5$

f(x) har i $x=1$ en diskontinuitet av typ <u>hopp</u>, dvs:
I $x=1$ "hoppar" f(x) från 3 till 5.



10) $$|x+2| < 6$$



Fall 1: $x+2 \geq 0$ eller $x \geq -2$

$x+2 < 6$

$x < 4$

Kombinerad med

Svar Fall 1: $-2 \leq x < 4$

Fall 2: $x+2<0$ eller $x<-2$

$-x-2<6$

$-2 < 6+x$

$-2-6 < x$

$x > -8$

Kombinerad med

Svar Fall 2: $-8 < x < -2$

$$\boxed{-8 < x < 4}$$

Olikhetens lösning

11) $$\frac{ab-1}{ab-(ab)^2} = \frac{ab-1}{ab\cdot(1-ab)} = \frac{-\cancel{(1-ab)}}{ab\cdot\cancel{(1-ab)}} = -\frac{1}{ab}$$

12) $$\frac{x-1}{1-x^2} + \frac{1+y}{y^2-1} = \frac{x-1}{(1-x)\cdot(1+x)} + \frac{1+y}{(y-1)\cdot(y+1)} =$$

$$= \frac{-\cancel{(1-x)}}{\cancel{(1-x)}\cdot(1+x)} + \frac{\cancel{y+1}}{(y-1)\cdot\cancel{(y+1)}} = \frac{-1}{x+1} + \frac{1}{y-1} =$$

$$= \frac{1}{y-1} - \frac{1}{x+1}$$

13) FF = Förändringsfaktorn för 1 timme.

"Från kl 8 till kl 17": 17 − 8 = 9 timmar.

$$(FF)^9 \cdot 3500 = 8950$$

$$(FF)^9 = \frac{8950}{3500} = 2{,}557 \quad \Big|\ \sqrt[9]{\cdot}\ \text{eller}\ (\cdot)^{1/9}$$

$$FF = \sqrt[9]{2{,}557} = (2{,}557)^{1/9}$$

$$FF = 1{,}1099 \approx 1{,}11$$

$$\Downarrow$$

Procentuella ökningen per timme = $\underline{\underline{11\ \%}}$

14) S = Startkapitalet, x = Antalet år

a)

$$(1{,}056)^x \cdot S = 2S \quad \Big|\ /S$$

$$(1{,}056)^x = 2 \quad \Big|\ \ln(\cdot)$$

$$\ln (1{,}056)^x = \ln 2 \quad :\ \text{3:e loglagen VL}$$

$$x \cdot \ln (1{,}056) = \ln 2 \quad \Big|\ /\ln(1{,}056)$$

$$x = \frac{\ln 2}{\ln(1{,}056)} = 12{,}72 \text{ år} =$$

$$= 12 \text{ år} + \underbrace{0{,}72 \cdot 12}_{8{,}64\ \approx\ 9 \text{ månader}} \text{ månader.}$$

Svar:

Efter $\underline{\underline{12 \text{ år och } 9 \text{ månader}}}$ har startkapitalet fördubblats.

b) Svaret är oberoende av startkapitalet.

15) a)

"Efter 5 år är bilen 100 000 kr värd" betyder att värdet y är $100\,000$ för $x = 5$:

$$
\begin{aligned}
y = 225\,000\, e^{-k \cdot 5} &= 100\,000 && \mid\ /\ 225\,000 \\
e^{-5\,k} &= \frac{100\,000}{225\,000} \\
e^{-5\,k} &= 0,44444444 && \mid\ \ln(\ ) \\
\ln(e^{-5\,k}) &= \ln\ 0,44444444 && :\ \text{Inversegenskapen av ln och e} \\
-\,5\,k &= -0,81093022 \\
k &= \frac{-0,81093023}{-5} \\
k &= 0,162\,186\,05
\end{aligned}
$$

b)

"Bilens nyvärde" betyder: $x = 0$ och

$$y = 225\,000\, e^{-k \cdot 0} = 225\,000\, e^{0} = 225\,000 \cdot 1 = 225\,000$$

10% av bilens nyvärde $= 225\,000 \cdot 0,10 = 22\,500$.

"Tills bilens värde har sjunkit till 10% av nyvärdet" betyder att värdet y är $22\,500$:

$$
\begin{aligned}
y = 225\,000\, e^{-k \cdot x} &= 22\,500 && \mid\ /\ 225\,000 \\
e^{-k \cdot x} &= \frac{22\,500}{225\,000} \\
e^{-k \cdot x} &= 0,1 && \mid\ \ln(\ ) \\
\ln(e^{-k \cdot x}) &= \ln\ 0,1 && :\ \text{Inversegenskapen av ln och e} \\
-k \cdot x &= \ln\ 0,1 && \mid\ /\ (-k) \\
x &= \frac{\ln\ 0,1}{-k} && :\ k = 0,162\,186\ \ \text{från a)} \\
x &= \frac{-2,302\,585}{-0,162\,186} \\
x &= 14,20
\end{aligned}
$$

Efter $14,20$ år har bilens värde sjunkit till 10% av nyvärdet, dvs efter 14 och $0,20$ år.

Men $0,20$ år $= 0,20 \cdot 12$ månader $= 2,4$ månader. Därför:

Efter 14 år och 3 månader har bilens värde sjunkit till — närmare bestämt under 10% av nyvärdet.